Annali di Matematica pura ed applicata. Milano. Se II vol. 1. 1868 pp. 288-302

Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie.

(*del prof.* R. LIPSCHITZ, *a Bonn*).

I più importanti progressi che ha fatti la teorica dei sistemi di equazioni differenziali, nelle quali certe variabili sono considerate come funzioni d'una variabile indipendente, dai lavori di JACOBI in poi, sono dovuti allo sviluppo della teorica delle quantità complesse. Per ogni dato sistema di equazioni differenziali una questione capitale è questa: se sia possibile, alla prima, di determinare le variabili dipendenti in modo che esse soddisfacciano il sistema di equazioni differenziali, e che per un dato valore della variabile indipendente soddisfacciano un numero di equazioni corrispondente al numero d'ordine del sistema. Tale questione è stata esaminata a fondo pel caso che le espressioni ch'entrano nel sistema di equazioni differenziali permettano immediatamente l'ipotesi, che tanto la variabile indipendente quanto le dipendenti sieno della forma $a+b\sqrt{-1}$. Siccome ogni funzione d'una quantità complessa, escludendo certi luoghi singolari del suo campo, dev'essere sviluppabile in serie procedente secondo le potenze intere e positive d'una funzione lineare di questa quantità complessa, così ne viene che la soluzione della questione in discorso dipende dalla risposta all'altra domanda, se cioè sia possibile di esprimere corrispondentemente alle addotte condizioni, sotto forma di serie di potenze, convergenti per un certo campo della variabile indipendente, le variabili dipendenti che entrano nel sistema di equazioni differenziali. È da questo punto di vista che l'esame della possibilità dell'integrazione completa d'un dato sistema di equazioni differenziali, avente l'indicato carattere, venne generalmente intrapreso ed eseguito (*).

(*) WEIERSTRASS, *Ueber die Theorie der analytischen Facultäten.* Gior. di Crelle, t. LI, pag. 43. BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, pag. 49.

Se invece le espressioni che entrano in un dato sistema di equazioni differenziali sono date nell'ipotesi soltanto di elementi reali, e non permettono un'immediata estensione all'ipotesi di elementi complessi, allora non siamo più autorizzati ad ammettere che le variabili dipendenti sieno sviluppabili in serie procedenti secondo le potenze d'una funzione lineare della variabile indipendente reale. Le condizioni della possibilità d'un'integrazione completa devono per ciò basarsi sopra altro terreno. Non essendovi a mia cognizione un lavoro indirizzato con rigore a questo scopo, io farò conoscere nelle seguenti pagine una ricerca relativa allo argomento, avvertendo che ne è guida la dimostrazione dell'esistenza d'un integrale definito (*).

Si può supporre che il proposto sistema di equazioni differenziali sia ridotto, mercè l'introduzione di nuove variabili dipendenti, ad una forma contenente soltanto i coefficienti differenziali di primo ordine delle n variabili $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \ldots \overset{n}{y}$ rispetto alla variabile indipendente x. Supporremo inoltre che i valori di ogni singolo coefficiente differenziale $\frac{d\overset{a}{y}}{dx}$, dove $a=1, 2, \ldots n$, possano essere rappresentati per mezzo delle variabili $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \ldots \overset{n}{y}$ (**), e sieno espressi per mezzo delle medesime. Allora il sistema di equazioni differenziali assume la seguente forma

$$\frac{d\overset{a}{y}}{dx}=\overset{a}{f}(x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \ldots \overset{n}{y}). \tag{1}$$

Ammettiamo ora che le n funzioni $\overset{a}{f}$ siano date per un certo complesso di sistemi continuamente connessi e reali di valori delle variabili $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \ldots \overset{n}{y}$; questo complesso si chiamerà il campo G. Nel caso che sia il numero $n=2$, il concetto che alle variabili $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}$ corrispondano coordinate ortogonali nello spazio offre una rappresentazione alla quale le seguenti considerazioni si collegano naturalmente. Per tutti i sistemi di valori del campo G, le n fun-

(*) NEWTON, *Principia*, liber I, sectio I, lemma II. LEJEUNE DIRICHLET, *Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinus-Reihen* (Repertorium der Physik di DOVE e MOSER, t. I, pag. 152).

(**) La condizione necessaria e sufficiente per ciò, nei sistemi di equazioni differenziali isoperimetriche trattati nei *Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale* (G. di Crelle-Borchardt t. 65, pag. 26), consiste in ciò, che il determinante ivi indicato con Δ non debba annullarsi identicamente; e questa condizione fu ivi esplicitamente notata.